

DIE  
ELEMENTARE RINGFLÄCHE

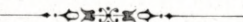
VIERTER ORDNUNG

VON

C. JUEL

---

D. KGL. DANSKE VIDENSK. SELSK. SKRIFTER, NATURVIDENSK. OG MATHEM. AFD., 8. RÆKKE, I. 4



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1916

# Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6<sup>te</sup> Række.

## Naturvidenskabelig og matematisk Afdeling.

	Kr.	Øre
<b>I</b> , med 42 Tavler, 1880—85 . . . . .	29.	50.
1. Prytz, K. Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880 . . . . .	•	65.
2. Boas, J. E. V. Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880 . . . . .	8.	50.
3. Steenstrup, Jap. Sepidiarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881 . . . . .	1.	35.
4. Colding, A. Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12 <sup>te</sup> —14 <sup>de</sup> Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881 . . . . .	10.	•
5. Boas, J. E. V. Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881 . . . . .	2.	•
6. Steen, A. Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882 . . . . .	•	50.
7. Krabbe, H. Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882 . . . . .	1.	35
8. Hannover, A. Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882 . . . . .	1.	60.
9. — Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884 . . . . .	4.	35.
10. — Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884 . . . . .	1.	30.
11. Lehmann, A. Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885 . . . . .	1.	85.
<b>II</b> , med 20 Tavler, 1881—86 . . . . .	20.	•
1. Warming, Eug. Familien Podostemaceae. 1 <sup>ste</sup> Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881 . . . . .	3.	15.
2. Lorenz, L. Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881 . . . . .	1.	30.
3. Warming, Eug. Familien Podostemaceae. 2 <sup>den</sup> Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882 . . . . .	5.	30.
4. Christensen, Odin. Bidrag til Kundskab om Manganets Ilt. 1883 . . . . .	1.	10.
5. Lorenz, L. Farvespredningens Theori. 1883 . . . . .	•	60.
6. Gram, J. P. Undersøgelser ang. Mængden af Primitiv under en given Grænse. Résumé en français. 1884 . . . . .	4.	•
7. Lorenz, L. Bestemmelse af Kviksølvøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885 . . . . .	•	80.
8. Traustedt, M. P. A. Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885 . . . . .	3.	•
9. Bohr, Chr. Om Iltens Afvigelse fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885 . . . . .	1.	•
10. — Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptionsmeter. Med 2 Tavler. 1886 . . . . .	1.	70.
11. Thiele, T. N. Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886 . . . . .	2.	•
<b>III</b> , med 6 Tavler, 1885—86 . . . . .	16.	•
1. Zeuthen, H. G. Keglesnitlæren i Oldtiden. 1885 . . . . .	10.	•
2. Levinsen, G. M. R. Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885 . . . . .	1.	10.
3. Rung, G. Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885 . . . . .	1.	10.
4. Melnert, Fr. De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886 . . . . .	6.	75.
<b>IV</b> , med 25 Tavler. 1886—88 . . . . .	21.	50.
1. Boas, J. E. V. Spolia Atlantica. Bidrag til Pteropodernes Morfologi og Systematik samt til Kundskaben om deres geografiske Udbredelse. Med 8 Tavler. Résumé en français. 1886 . . . . .	10.	50.
2. Lehmann, A. Om Anvendelsen af Middelgradationernes Metode paa Lyssansen. Med 1 Tavle. 1886 . . . . .	1.	50.
3. Hannover, A. Primordialbrusken og dens Forbening i Truncus og Extremiteter hos Mennesket før Fødselen. Extrait en français. 1887 . . . . .	1.	60.
4. Lütken, Chr. Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten <i>Cyamus</i> Latr. eller <i>Hvallusene</i> . Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887 . . . . .	•	60.
5. — Fortsatte Bidrag til Kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, særligt Slægten <i>Himantolophus</i> . Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887 . . . . .	•	75.
6. — Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne <i>Tursiops</i> , <i>Orca</i> og <i>Lagenorhynchus</i> . Med 2 Tavler. Résumé en français. 1887 . . . . .	4.	75.
7. Køefoed, E. Studier i Platosoforbindelser. 1888 . . . . .	1.	30.
8. Warming, Eug. Familien Podostemaceae. 3 <sup>die</sup> Afhandling. Med 12 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1888 . . . . .	6.	45.
<b>V</b> , med 11 Tavler og 1 Kort. 1889—91 . . . . .	15.	50.
1. Lütken, Chr. Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om de tre pelagiske Tandhval-Slægter <i>Steno</i> , <i>Delphinus</i> og <i>Prodelphinus</i> . Med 1 Tavle og 1 Kort. Résumé en français. 1889 . . . . .	2.	75.
2. Valentiner, H. De endelige Transformations-Grupper Theori. Résumé en français. 1889 . . . . .	5.	50.
3. Hansen, H. J. Cirolanidæ et familiæ nonnullæ propinquæ Musei Hauniensis. Et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr. Med 10 Kobbetavler. Résumé en français. 1890 . . . . .	9.	50.
4. Lorenz, L. Analytiske Undersøgelser over Primitivmængderne. 1891 . . . . .	•	75.

DIE  
ELEMENTARE RINGFLÄCHE

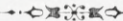
VIERTER ORDNUNG

VON

C. JUEL

---

D. KGL. DANSKE VIDENSK. SELSK. SKRIFTER, NATURVIDENSK. OG MATHEM. AFD., 8. RÆKKE, I. 4



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1916



Die vorliegende Theorie der im Allgemeinen nicht analytischen Ringfläche vierter Ordnung enthält wesentlich eine vollständige Diskussion der Umrisse dieser Fläche aus den verschiedenen Punkten des Raumes. Die übrigens leichter zugänglichen und wenigstens für die algebraischen Flächen auch mehr diskutierten ebenen Schnitte habe ich nur soweit angegeben, als sie für die Bestimmung der Umrisse nützlich sind. Soviel mir bekannt, ist das kleine hier im Angriff genommene Problem selbst für den Kugelring nicht vollständig gelöst, und der Formenreichtum ist nicht ohne Interesse. Die Bestimmung jedes Umrisses für sich habe ich möglichst independent zu führen versucht, also auch so, dass irgendwie kompliziertere Grenzprozesse vermieden sind.

---

Eine Ringfläche entsteht durch Drehung eines Ovals um eine das Oval nicht schneidende aber in seiner Ebene liegende Achse. Ist das Oval beliebig, kann die Ordnung der Fläche beliebig hoch werden. Hier wollen wir uns ausschliesslich an Ringflächen vierter Ordnung halten. Es ist leicht die Bedingung dafür anzugeben, dass dies der Fall wird. Erstens kann eine die Achse schneidende oder eine auf die Achse senkrecht stehende Gerade höchstens vier Punkte mit der Fläche gemein haben. Um die Schnittpunkte der Fläche mit einer Geraden  $l$  beliebiger Lage zu bestimmen, drehe man  $l$  um die Achse  $a$ . Dadurch entsteht ein Hyperboloid, dessen Meridianschnitt ( $l$ ) das Oval  $a$  in ebenso vielen Punkten schneidet, als  $l$  mit der Fläche gemein hat. Damit die Fläche vierter Ordnung wird, ist es also hinreichend und nothwendig, dass das Oval in höchstens vier Punkten von jeder Hyperbel geschnitten wird, das seine Querachse auf der festen Geraden  $a$  hat. Die Fläche ist also jedenfalls vierter Ordnung, wenn  $a$  ein elliptisch gekrümmtes Oval ist. Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht nothwendig.

Wir wollen nun erst den folgenden Satz aufstellen.

Eine Ringfläche vierter Ordnung ist auch vierter Klasse.

Die durch eine Gerade  $l$  gehenden berührenden Ebenen sind nämlich die gemeinsam berührenden Ebenen der Fläche und desjenigen Hyperboloids, das durch die Drehung von  $l$  um die Achse  $a$  erzeugt wird. Der Satz folgt deshalb aus dem bekannten, dass zwei Kurven zweiter Ordnung, welche 0, 2 oder 4 Punkte mit einander gemein haben, höchstens vier Tangenten mit einander gemein haben können.

Wir wollen aber noch des Folgenden wenig untersuchen, wie viele berührende Ebenen durch  $l$  gehen, wenn  $l$  seine verschiedene Lagen in Bezug auf die Fläche einnimmt.

Schneidet  $l$  die Achse  $a$ , dann gehen durch  $l$  4, 2 oder keine berührende Ebenen, jenachdem  $l$  ausserhalb zwei, einer oder auch keiner der Kegelflächen liegt, welche die Fläche aus dem Punkt ( $al$ ) projicieren. Steht  $l$  senkrecht auf der Achse, dann gehen durch  $l$  4 oder 2 berührende Ebenen, jenachdem der Schnittpunkt von  $l$  mit derjenigen Meridianebene, die auf  $l$  senkrecht ist, ausserhalb beider oder nur ausserhalb eines der in dieser Ebene liegenden Ovale liegt. Schneidet  $l$  noch die Achse, dann gehen durch  $l$  4 berührende Ebenen.

Schneidet  $l$  die Fläche in vier Punkten, dann haben  $\alpha$  und die Hyperbel ( $l$ ) vier Punkte mit einander gemein; einem bekannten Satze zufolge müssen sie dann entweder vier oder auch keine Tangenten mit einander gemein haben. Man sieht aber leicht, dass sie in diesem Fall vier Tangenten mit einander gemein haben. Nehmen wir nämlich an, dass  $\alpha$  und ( $l$ ) keine Tangente mit einander gemein haben; dann würde jede Tangente an  $\alpha$  zwei Punkte mit ( $l$ ) gemein haben, weil dies mit einer Tangente, deren Berührungspunkt einem Schnittpunkt von  $\alpha$  und ( $l$ ) nahe liegt, der Fall ist. Ebenso sieht man, dass jede Tangente an ( $l$ ) zwei Punkte mit  $\alpha$  gemein haben würde. Es wäre also  $\alpha + (l)$  eine Kurve, welche mit jeder ihrer Tangenten vier Punkte gemein hat — der Berührungspunkt zweimal gerechnet. Deshalb würde jede Gerade wenigstens zwei Punkte mit  $\alpha + (l)$  gemein haben. Weil aber die Axe  $\alpha$  keine Punkte mit  $\alpha + (l)$  gemein hat, müssen also  $\alpha$  und ( $l$ ) Tangenten mit einander gemein haben.

Schneidet  $l$  die Fläche in zwei Punkten, dann haben  $\alpha$  und ( $l$ ) zwei Schnittpunkte und deshalb auch zwei Tangenten mit einander gemein.

Hat endlich  $l$  keinen Punkt mit der Fläche gemein, dann haben auch  $\alpha$  und ( $l$ ) keinen Punkt mit einander gemein, und haben deshalb entweder keine oder auch vier Tangenten mit einander gemein. Wir können uns bestimmter ausdrücken, wenn man die zwei Kreise, die parabolischen Kreise  $\pi_1$  und  $\pi_2$ , in Betracht zieht, längs welchen die Fläche von zwei Ebenen berührt wird. Die Punkte der Kreise sind die parabolischen Punkte der Fläche, und sie trennen die „hyperbolischen“ Punkte der Fläche von den „elliptischen“. Jenachdem die Schnittpunkte dieser Ebenen mit  $l$  beide ausserhalb  $\pi_1$  und  $\pi_2$ , oder beide innerhalb  $\pi_1$  und  $\pi_2$  liegen — und nur diese Fälle sind hier möglich — liegt  $\alpha$  beziehungsweise ausserhalb oder innerhalb ( $l$ ). Man hat also zusammenfassend:

Durch eine Gerade, welche die Fläche entweder in vier oder (2) auch in zwei Punkten schneidet, gehen beziehungsweise vier oder auch zwei berührende Ebenen. Durch eine Gerade  $l$ , welche die Fläche nicht schneidet, geht keine berührende Ebene, wenn ihre Schnittpunkte mit den Ebenen der parabolischen Kreise beide innerhalb dieser Kreise liegen; sonst vier.

Wir bemerken besonders, dass wenn  $l$  eine Haupttangente der Fläche ist (die mit derselben drei konsekutive Punkte gemein hat), dann durch  $l$  eine und nur eine ausserhalb  $l$  berührende Ebene geht (auch nicht zwei zusammenfallende).

Die Ebenen, welche die Fläche in mehreren Punkten berühren, lassen sich leicht bestimmen, weil die Fläche eine Umdrehungsfläche ist. Man erhält theils die Ebenen der parabolischen Kreise, theils die berührenden Ebenen einer mit der Fläche koaxialen Umdrehungskegelfläche. Diese möge das erzeugende Oval  $\alpha$  in  $R$  und  $R_1$ , und die Fläche in den Kreisen  $\rho$  und  $\rho_1$  berühren.

Um nun unsere Ringfläche sicher als Elementarfläche auffassen zu können, haben wir den Ort der Berührungspunkte der vierpunktig berührenden Tangenten zu suchen. Wir thun dies derart, dass wir erst die doppelberührenden Tangenten

untersuchen, und danach die zwei Berührungspunkte einer solchen Tangente zusammenfallen lassen.

Wenn wir im folgenden von Hyperbeln sprechen, werden wir, wenn nicht anders ausdrücklich gesagt wird, darunter immer Hyperbeln verstehen, deren transverse Achsen auf  $a$  liegen.

Er kommt nun darauf an Hyperbeln zu untersuchen, die mit  $a$  doppelte Berührung haben. Er ist erstens ersichtlich, dass eine Hyperbel das Oval  $a$  nicht in

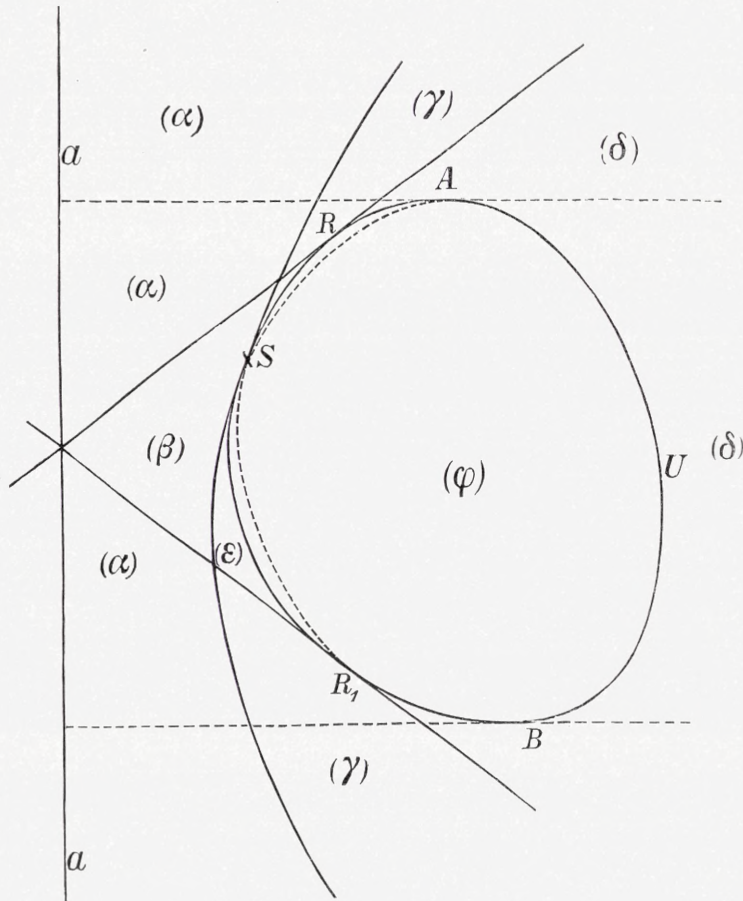


Fig. 1

mit  $a$  als transverse Achse, dann haben die drei Geradenstücke  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$ , welche von den Winkelspitzen des Dreiecks  $ABC$  senkrecht auf  $a$  gehen, keinen Punkt mit den bzw. gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks gemein. Diese Bedingung ist umgekehrt dafür hinreichend, dass  $A$ ,  $B$  und  $C$  demselben Zweig einer Hyperbel mit  $a$  als transverse Achse angehören, wenn man noch weiss, dass die drei Punkt auf derselben Seite von  $a$  liegen.

zwei Punkten berühren kann, die auf der konvexen Seite der Fläche liegen, also auf dem Bogen  $ARB$  und nicht auf dem Bogen  $AUB$  (s. Fig. 1); wir nennen den ersten Bogen  $(AB)_I$ , den zweiten  $(AB)_{II}$ . Ist nun  $P$  ein beliebiger Punkt von  $(AB)_I$ , wird eine Hyperbel, welche  $a$  in  $P$  berührt und durch einen beliebigen Punkt  $M$  von  $a$  geht, noch einen und nur einen Punkt  $M_1$  mit  $a$  gemein haben. Liegt  $P$  fest, ist die Beziehung  $(MM_1)$  überall stetig- und gegenseitig eindeutig. Wir benützen noch den folgenden unmittelbar ersichtlichen (und übrigens leicht beweisbaren) Hilfsatz:

Sind  $A$ ,  $B$  und  $C$  drei Punkte des einen Zweiges einer Hyperbel



Es sei  $P_1$  der zweite Schnittpunkt von  $a$  mit einer durch  $P$  gehenden und auf  $a$  senkrechten Geraden; in diesem Punkt fallen offenbar die zwei oben genannten Punkte  $M$  und  $M_1$  zusammen. Bewegt  $M$  sich auf  $a$  in einem bestimmten Sinn von  $P_1$  aus, dann wird sich auch  $M_1$  in einem bestimmten Sinn bewegen, weil die Beziehung gegenseitig eindeutig ist, und zwar dem oben genannten Hilfsatz zufolge in dem entgegengesetzten von  $M$ . Es fallen demnach  $M$  und  $M_1$  noch einmal und nur einmal in einem Punkt  $Q$  von  $a$  zusammen. Hierbei haben wir aber noch nicht hinreichend benutzt, dass  $a$  die transverse Achse sein soll. Liegt  $P$  in dem der Achse  $a$  nächsten Punkt von  $a$ , dann ist offenbar  $a$  die transverse Achse einer in  $P$  berührenden Hyperbel. Wählt man  $P$  in  $R$ , dann muss  $Q$  in  $R_1$  fallen, indem die Hyperbel in zwei Gerade zerfällt. Überschreitet aber  $P$  den Punkt  $R$ , dann wird die Hyperbel in den anderen Asymptotenwinkelraum übergehen, und  $a$  wird Brennpunktsachse.  $P$  und  $Q$  müssen demnach beide auf dem Bogen  $RSR_1$  fallen (siehe Fig. 1). Wir haben also bewiesen:

In jedem Punkt  $P$  auf dem durch die Kreise  $\rho$  und  $\rho_1$  begrenzten (3) unkonvexen Teil der Fläche, giebt es zwei Tangenten, die in noch einem anderen Punkt  $Q$  berühren.

Wenn  $P$  in  $R$  liegt, dann fallen die zwei genannten Tangenten in eine zusammen.

Ein Berührungspunkt eines Doppeltangente mit der Fläche kann also nur auf dem eben bezeichneten Flächentheil liegen.

Man erinnere nun, dass die Beziehung  $(P, Q)$  auch stetig und gegenseitig eindeutig ist. Befindet  $P$  sich in dem früher genannten Punkt  $R$  (siehe Fig. 1), muss  $Q$  sich in  $R_1$  befinden, denn die Tangenten in  $R$  und  $R_1$  bilden eine spezielle Hyperbel mit  $a$  als transverse Achse. Geht  $P$  von  $R$  nach  $R_1$  in einem bestimmten Sinn, muss  $Q$  von  $R_1$  aus auch in einen bestimmten Sinn gehen. Kommt  $P$  in  $R$ , muss  $Q$  in  $R$  fallen. Es bewegen sich deshalb  $P$  und  $Q$  in entgegengesetzten Sinn, und sie müssen einmal in einem Punkt  $S$  des Bogens  $RR_1$  und auf dem konvexen Theil der Fläche zusammenfallen. Man hat also:

Der Ort der Berührungspunkte der vierpunktig berührenden (4) Tangenten der Fläche ist ein und nur ein Parallelkreis.

Dieser Kreis in Verbindung mit den parabolischen Kreisen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  zerlegt die Fläche in eine endlichen Zahl von Stücken, und die Fläche ist deshalb eine Elementarfläche.<sup>1)</sup>

Es ist nun im folgenden unsere Hauptaufgabe theils die verschiedenen ebenen Schnitte theils die Umrisse der Fläche aus den verschiedenen Punkten des Raumes hinreichend zu charakterisieren. Wir werden jedoch das Hauptgewicht auf die Umrisse legen, indem diese schon für den gewöhnlichen Kugelring, soviel ich weiss nicht eingehend bestimmt worden sind.

Wir können gleich bemerken, dass jede ebene Schnittkurve eine Symmetrieachse

<sup>1)</sup> Siehe: Über Elementarflächen, Jahresber. d. deutschen Math. Vereinig. Bd. 22. S. 345 (1913).

und jeder umschriebener Kegel eine Symmetrieebene haben muss; er folgt dies daraus, dass die Fläche eine Umdrehungsfläche ist.

Wir wollen nun erst die Schnittkurve der Fläche mit einer ihr berührenden Ebene untersuchen; ein Schnitt ist nur vorhanden, wenn der Berührungspunkt  $P$  auf der unkonvexen Seite der Fläche liegt.

Nehmen wir erst  $P$  auf dem kleineren Bogen  $AR$  oder  $BR_1$  (siehe Fig. 1), wobei die Endpunkte nicht mitzurechnen sind. Es ist  $P$  dann ein Doppelpunkt der Kurve und infolge (4) ein solcher, aus dem keine ausserhalb  $P$  berührende Tangente geht, nach unserer Terminologie also ein Doppelpunkt erster Art. Hätte die Kurve mehrere Zweige, dann müsste sie noch einen Doppelpunkt haben (denn sie liegt ganz im Endlichen), was aber nicht der Fall ist. Die Kurve ist also einzügig und hat einen und nur einen Doppelpunkt erster Art. Die Form ist dadurch vollständig bestimmt (siehe Fig. 2).

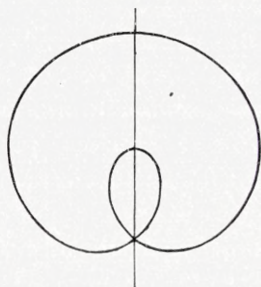


Fig. 2.

Nehmen wir nun den Berührungspunkt in  $R$ . Hier haben wir den Satz:

- (5) Jede doppel berührende Ebene einer Ringfläche vierter Ordnung schneidet dieselbe in zwei Ovalen.

Die Schnittkurve hat zwei und nur zwei Doppelpunkte  $R$  und  $R'$  und keine Spitzen. Sie hat aber auch keine Wendetangenten. Eine solche kann nämlich nur kommen, wenn in der Schnittebene  $\mu$  eine Haupttangente  $t$  der Fläche zu finden ist. Durch diese Gerade würde dann zwei (zusammenfallende) berührende Ebenen gehen, welche in den ausserhalb  $t$  liegenden Punkten  $R$  und  $R'$  berühren würden, was infolge des Satzes 1 unannehmbar ist (siehe Seite 5). Die Kurve kann ferner nicht einzügig sein. Durch  $R$  und  $R'$  gehen nämlich keine Gerade, welche die Schnittkurve ausserhalb  $R$  und  $R'$  berühren, und eine Kurve vierter Ordnung ohne Spitzen und mit einer paaren Zahl von Doppelpunkten erster Art existiert nicht.

Die Kurve hat also zwei Zweige, und keine von diesen hat Spitzen, Inflexionspunkte oder Doppelpunkte; sie ist also aus zwei Ovalen zusammengesetzt.<sup>1)</sup>

Wenn  $P$  auf dem Bogen  $RSR_1$  liegt, dann hat die Schnittkurve wie im ersten Fall einen und nur einen Doppelpunkt. Die ganz im Endlichem liegende Kurve kann auch nicht zerfallen, weil zwei paare Kurven einen paaren Zahl von Punkten mit einander gemein haben müssen. Der Unterschied ist nur der, dass infolge Satz (3) aus  $P$  zwei Tangenten gehen, welche ausserhalb  $P$  berühren. Eine einzügige Kurve vierter Ordnung ohne Spitzen und mit einem und nur einem Doppelpunkt zweiter Art ist aber vollständig bestimmt und hat zwei Doppeltangenten und zwei Inflexionspunkte. Die Form einer solchen Kurve findet sich in Fig. 3.

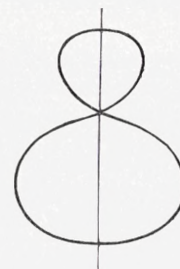


Fig. 3.

<sup>1)</sup> Einen anderen Beweis findet man in „Nyt Tidsskrift f. Mathematik“ Bd. 20, S. 41, 1909: „Note om en ikke analytisk Omdrejningsflade“.

Es muss besonders bemerkt werden, dass wenn  $P$  in  $S$  fällt, dann die Tangenten in  $P$  zugleich die Wendetangenten der Schnittkurve sind.

Es hat keine Schwierigkeiten weitergehend alle ebene Schnittkurven der Fläche der Form nach zu bestimmen. Wir wollen aber dies nicht durchführen und uns an die Umrisse halten. Zuerst wollen wir untersuchen, ob bei den Umrisen Inflexionspunkte auftreten können.

Es sei  $P$  ein Punkt, aus dem die Fläche auf eine Ebene projiziert wird; den Umriss bezeichnen wir mit  $\omega$ . Durch  $P$  lege man eine auf  $\alpha$  senkrechte Ebene  $\pi$ , deren Spur in der Bildebene die Gerade  $l$  seien möge. Wird nun die Fläche nicht von  $\pi$  geschnitten oder liegt  $P$  innerhalb beider Kreise, in denen die Fläche von  $\pi$  geschnitten wird, dann gehen durch jede in  $\pi$  liegende und  $P$  enthaltende Gerade  $p$  vier berührende Ebenen. Es gehen also in diesem Fall durch jeden Punkt von  $l$  vier Tangenten an  $\omega$ , und es kann also  $l$  weder von  $\omega$  noch von einer Wendetangente von  $\omega$  geschnitten werden, d. h.  $\omega$  hat keine Inflexionspunkte.

Wenn aber  $\pi$  die Fläche in zwei getrennten Kreisen schneidet, und liegt  $P$  nicht innerhalb beider Kreise, dann gehen durch eine der eben genannten Geraden  $p$  entweder zwei oder vier berührende Ebenen; der Übergang von zwei zu vier kann aber nur in den die Fläche berührenden Geraden  $p$  geschehen. Eine Änderung in der Zahl der Tangenten, welche durch einen Punkt von  $l$  gehen, tritt also nur ein in den Schnittpunkten von  $l$  mit  $\omega$ , d. h.  $\omega$  hat auch in diesem Fall keine Inflexionspunkte.

Diese Schlüsse bleiben gültig gleichviel ob  $P$  ein Punkt der Fläche ist, oder nicht.

Es ist noch der Fall  $\omega$  zu berücksichtigen, dass die Ebene  $\pi$  die Fläche längs einer der parabolischen Kreise  $\pi_1$  oder  $\pi_e$  berührt. Dann ist, wenn  $P$  ausserhalb der Kreise liegt,  $l$  eine Doppeltangente von  $\omega$ , während sie, wenn  $P$  innerhalb  $\pi_1$  oder  $\pi_2$  liegt, eine isolierte Gerade von  $\omega$  wird. In beiden Fällen zeigen die obigen Schlüsse, dass  $\omega$  keine Inflexionspunkte haben kann. Es stellt sich aber anders, wenn hier  $P$  auf der Fläche liegt z. B. in  $\pi_1$ . Es gehen zwar auch in diesem Fall durch jede Gerade  $p$  ausser der doppel zu rechnenden Ebene von  $\pi_1$  noch zwei berührende Ebenen, aber die Spur  $l$  von  $\pi$  ist selbst eine Tangente an  $\omega$ , und zwar, wie wir sehen werden, eine Wendetangente, deren Berührungspunkt  $T$  die Spur der in  $P$  berührenden Tangente  $t$  an  $\pi_1$  ist. Es sei nämlich  $p$  eine durch  $P$  gehende in  $\pi_1$  liegende von  $t$  verschiedene Gerade. Durch diese gehen, wie schon gesagt, ausser  $\pi_1$  noch zwei berührende Ebenen. Betrachten wir aber zwei Gerade  $p'$  und  $p''$ , welche beide durch  $P$  gehen, beide  $p$  nahe liegen, welche aber in einer durch  $p$  gehenden nicht  $\pi_1$  enthaltenden Ebene „im kleinen“ durch  $p$  getrennt sind. Von diesen Geraden schneidet die eine z. B.  $p'$  die Fläche in vier Punkten, während die andere  $p''$  in zwei Punkten schneidet. Durch  $p'$  gehen also vier berührende Ebenen, während durch  $p''$  nur zwei solche Ebenen gehen. Aber betrachten wir weiter zwei Gerade  $t'$  und  $t''$ , welche beide durch  $P$  gehen, beide  $t$  nahe liegen, aber in einer durch  $t$  gehenden  $\pi_1$  nicht enthaltenden Ebene „im kleinen“ durch  $t$  getrennt sind. Diese Gerade schneiden beide die Fläche in zwei

Punkten, und es gehen also durch beide Gerade auch zwei berührende Ebenen. Also muss  $t$  eine Wendetangente von  $\omega$  sein, denn überschneidet in der Ebene von  $\omega$  ein Punkt  $M$  diese Gerade in dem Punkt  $T$ , dann bleibt die Zahl der durch  $M$  gehenden Tangenten an  $\omega$  unverändert, findet aber die Überschreitung von  $M$  über  $t$  in einem beliebigen anderen Punkt von  $t$  Statt, dann ändert sich dieselbe Zahl um zwei. Durch diese Angaben wird eben eine Wendetangente charakterisiert.

Man hat also:

- (6) Der Umriss einer Ringfläche vierter Ordnung aus einem Punkt  $P$  hat im Allgemeinen keine Wendetangente; eine solche findet sich nur, wenn  $P$  in einem parabolischen Punkt der Fläche liegt.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch ein Paar Hilfsätze aufstellen.

- (7) Eine Kurve vierter Klasse ohne Inflexionspunkte oder Doppelpunkte kann nicht in zwei Zweige vierter Klasse zerfallen.

Nehmen wir nämlich an, die Kurve  $\omega$  zerfalle in  $\omega'$  und  $\omega''$ , welche alle vierter Ordnung sind. Weil  $\omega'$  — und ebenso  $\omega''$  — keine Doppelpunkte oder Inflexionspunkte hat, zerlegt sie ihre Ebene in zwei Gebiete; aus den Punkten des einen Gebietes geben zwei, aus denen des anderen Gebietes vier Tangenten an  $\omega'$ . Es sei nun  $M$  ein Punkt aus dem zwei Tangenten an  $\omega'$  und deshalb auch zwei an  $\omega''$  geben. Von  $M$  aus kann man einen Weg finden, der in einem Punkt  $P'$  von  $\omega''$  endigt, ohne  $\omega''$  überschritten zu haben — oder umgekehrt. Durch einen Punkt auf der Verlängerung des Weges über  $P'$  hinaus würden dann mehr denn vier Tangenten an  $\omega' + \omega''$  gehen.

Die gegebenen Umstände verhindern selbstverständlich nicht, dass die Kurve zerlegbar ist. Sie kann möglicherweise in zwei Ovale, in ein Oval und eine Kurve vierter Klasse oder auch in zwei Kurven dritter Klasse zerfallen.

Ferner hat man:

- (8) Eine Kurve vierter Klasse mit mehr denn eine Doppeltangente kann nicht in zwei Zweige dritter Klasse zerfallen.

Es zerfalle  $\omega$  in zwei Zweige dritter Klasse  $\omega'$  und  $\omega''$ ; diese Zweige haben wenigstens eine Tangente  $t$  mit einander gemein. Aus dem Schnittpunkt von  $t$  mit einer anderen Doppeltangente von  $\omega$  würden mehr denn vier Tangenten an  $\omega$  gehen.

Wir werden im folgenden zuerst die Umriss aus einem auf der Fläche liegenden Augenpunkt untersuchen.

Erst wollen wir die Spitzen eines solchen Umrisses direkt bestimmen; diese sind die Spuren der durch  $P$  gehenden aber nicht in  $P$  berührenden Haupttangente. Dreht man diese um die Gerade  $a$  als Achse, sieht man, dass es darauf ankommt diejenigen Hyperbel — hier wie immer im Folgenden mit  $a$  als transverse Achse — zu bestimmen, welche durch  $P$  gehen und in einem im Allgemeinen von  $P$  verschiedenen Punkt Berührung zweiter Ordnung mit dem durch  $P$  gehenden Meridianoval  $\alpha$  haben.

Wir müssen aber erst eine einfachere Aufgabe lösen, nämlich diejenigen Hyperbel bestimmen, welche durch zwei Punkte  $P$  und  $N$  von  $a$  gehen und dieselbe noch

in einem im Allgemeinen von  $P$  und  $N$  verschiedenen Punkt  $Q$  berühren; es muss selbstverständlich  $Q$  auf dem nicht konvexen Theil der Fläche liegen. Bei dieser Aufgabe müssen wir vor allem den Seite 6 genannten Hilfsatz erinnern, der die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür giebt, dass drei Punkte einem und demselben Zweig der Hyperbel angehören, denn das muss für  $P$ ,  $N$  und  $Q$  der Fall sein. Aber es ist noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, dass zwei der drei Punkte in einer auf  $a$  senkrechten Geraden liegen; in dem Fall muss aber die Hyperbel in zwei auf  $a$  senkrechte Gerade zerfallen.

Um nun unsere vorläufige Aufgabe zu lösen, legen wir durch zwei feste Punkte  $P$  und  $N$  und einen veränderlichen Punkt  $M$  von  $a$  eine Hyperbel. Diese schneidet noch  $a$  in einem Punkt  $M'$ , und die Abhängigkeit  $M-M'$  ist stetig, gegenseitig eindeutig und involutorisch. Schneiden die durch  $P$  und  $N$  gehenden auf  $a$  senkrechten Gerade die Kurve  $a$  bzw. nochmals in  $P_1$  und  $N_1$ , dann haben wir in  $P_1$  und  $N_1$  zwei einander entsprechende Punkte  $M$  und  $M'$ . Liegen nun erstens  $P$  und  $N$  beide auf der konvexen Seite der Fläche, dann müssen dem genannten Hilfsatz zufolge  $M$  und  $M'$  beide auf dem  $A$  nicht enthaltenden Bogen  $P_1N_1$  liegen, und wenn auf diesem Bogen  $M$  von  $P_1$  nach  $N_1$  läuft, muss  $M'$  von  $N_1$  nach  $P_1$  laufen.  $M$  und  $M'$  fallen also einmal und nur einmal in einem Punkt des Bogens  $P_1N_1$  zusammen. (Fig. 4).

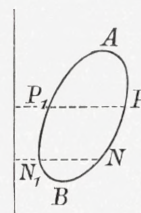


Fig. 4.

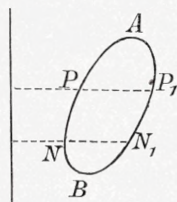


Fig. 5.

Liegen  $P$  und  $N$  beide auf der nicht konvexen Seite der Fläche, dann muss aus demselben Grunde  $M$  von  $P_1$  über  $P$  nach  $N_1$  laufen, und  $M'$  von  $N_1$  über  $N$  nach  $P_1$ . Hier findet also auch ein und nur ein Zusammenfallen von  $M$  und  $M'$  statt. (Fig. 5).

Liegt endlich  $P$  auf der nicht konvexen,  $N$  auf der konvexen Seite der Fläche, dann muss  $M$  von  $P_1$  ausgehend entweder den Bogen  $P_1APN_1$  und gleichzeitig  $M'$  den Bogen  $N_1PAP_1$  durchlaufen, oder auch  $M$  den Bogen  $P_1BPN_1$  und  $M'$  gleichzeitig den Bogen  $N_1PBP_1$ .

In beiden Fällen findet man einen und nur einen Zusammenfallspunkt  $Q$ , der entweder auf dem Bogen  $N_1A$  oder auf dem Bogen  $N_1B$  liegt. Der Fall, wo entweder  $P$  oder  $N$  in einem der Punkte  $A$  oder  $B$  liegt, macht ersichtlich keinen Unterschied in dem Resultat. (Fig. 6).

Wir müssen aber noch den Sonderfall betrachten, wo  $P$  und  $N$  beide in einer und derselben auf  $a$  senkrechten Geraden liegen. Hier hat man nämlich zwei zerfallene Hyperbeln als Lösungen, welche beide die Gerade  $PN$  enthalten und ausserdem noch entweder die eine oder die andere, der auf  $a$  senkrechten Tangenten von  $a$ . Des folgenden wegen machen wir noch darauf aufmerksam, dass wenn  $P$  auf dem nicht konvexen Theil der Fläche liegend festgehalten wird, während  $N$  gegen  $P_1$  konvergiert, dann  $Q$  dem oben gesagten zufolge nach  $A$  oder auch nach  $B$  konvergiert, jenachdem  $N$  ehe  $P_1$  erreicht wird, sich mit  $B$  oder mit  $A$  auf derselben Seite von  $PP_1$  befindet. Wird dagegen  $N$  auf dem konvexen Theil der

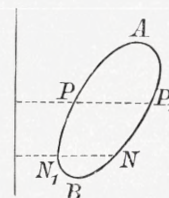


Fig. 6.

Fläche liegend festgehalten, während  $P$  nach  $N_1$  konvergiert, dann konvergiert  $Q$  nach  $A$  oder nach  $B$ , jenachdem  $P$  mit  $A$  oder mit  $B$  auf derselben Seite von  $NN_1$  sich befindet.

Wir haben also gefunden:

- (9) Durch zwei beliebige Parallelkreise einer Ringfläche vierter Ordnung, deren Ebenen nicht zusammenfallen, geht immer ein und nur ein koaxiales Hyperboloid, das die Fläche in einem im Allgemeinen von den erstgenannten verschiedenen Kreis berührt.

Wir können nun leicht die durch einen Flächenpunkt  $P$  gehenden Haupttangente bestimmen. Wir nehmen erst  $P$  auf dem konvexen Theil der Fläche, und es sei  $a$  das durch  $P$  gehende Oval. Eine durch  $P$  gehende und auf  $a$  senkrechte Gerade schneide  $a$  nochmals in  $P_1$ . Legen wir nun durch  $P$  und einen Punkt  $N$  von  $a$  die  $a$  in einem neuen Punkt  $Q$  berührende Hyperbel, dann ist die Beziehung  $N-Q$  im Allgemeinen gegenseitig eindeutig; nur wenn  $N$  in  $P_1$  fällt, kann  $Q$  entweder in  $A$  oder in  $B$  fallen. Dem oben gesagten zufolge, wird aber, wenn  $N$  von  $P_1$  ausgehend auf dem unkonvexen Theil nach  $A$  geht, der entsprechende Punkt  $Q$  von  $A$  ausgehen und im entgegengesetzten Sinn von  $N$ .  $Q$  und  $N$  fallen also einmal und nur einmal auf dem genannten Bogen  $P_1A$  zusammen. Ebenso findet sich auch ein und nur ein Zusammenfallspunkt  $T$  von  $N$  und  $Q$  auf dem Bogen  $P_1B$  (siehe Fig. 4). Durch  $P$  gehen also zwei Hyperbel, welche drei zusammenfallende (im Allgemeinen von  $P$  verschiedene) Punkte mit  $a$  gemein haben.

Nehmen wir nun  $P$  auf dem unkonvexen Theil der Fläche und bestimmen  $P_1$  wie oben. Die Beziehung  $N-Q$  (mit denselben Bezeichnungen) ist wieder gegenseitig eindeutig, wenn nicht  $N$  in  $P_1$  gewählt wird. Läuft aber hier  $N$  von  $P_1$  nach  $A$  (auf dem konvexen Theil), dann wird  $Q$  von  $B$  aus über  $P$  nach  $A$  laufen, und wenn  $N$  in  $P_1$  gelangt ist, dann wird  $Q$  in  $B$  fallen. Es fallen deshalb  $Q$  und  $N$  nur einmal zusammen, und es giebt nur eine durch  $P$  gehende Hyperbel, die mit  $a$  drei zusammenfallende im Allgemeinen von  $P$  verschiedene Punkte gemein hat.

Dasselbe gilt, wie leicht zu sehen, auch, wenn  $P$  in  $A$  oder in  $B$  liegt.

Erinnern wir uns nun, dass durch jeden Punkt eines Hyperboloids zwei Gerade der Fläche gehen, hat man:

- (10) Durch jeden hyperbolischen oder parabolischen Punkt  $P$  der Ringfläche gehen zwei Haupttangente, welche im Allgemeinen ausserhalb  $P$  berühren. Durch jeden elliptischen Punkt gehen aber vier solche Haupttangente.

Es wäre leicht die Zusammenfallspunkte von  $Q$  und  $T$  zu suchen, und dadurch den Satz (4) aufs neue zu beweisen; wir lassen aber dies aus.

Indem wir nun endlich zu den Umrissen übergehen, betrachten wir erst den Fall, dass der Augenpunkt  $P$  in einem elliptischen Punkt der Fläche liegt. Projiziert man auf eine Ebene  $\pi$ , die der in  $P$  berührenden Ebene parallel ist, dann gehen infolge (1) aus jedem unendlich fernen Punkt von  $\pi$  zwei Tangente an den Um-

riss  $\omega$ ; diese muss deshalb ganz im Endlichen liegen. Sie hat ferner zwei Doppeltangenten  $t = 2$ , keine Wendetangenten  $w = 0$ , und keine Doppelpunkte, das letztere weil die Fläche vierter Ordnung ist. Aus den Hilfsätzen (7) und (8) folgt ferner, dass  $\omega$  nicht in zwei Zweige vierter oder dritter Klasse zerfallen kann. Sie kann aber auch nicht in zwei Ovale oder in eine aus einem Oval und einer Kurve vierter Klasse zusammengesetzte Kurve zerfallen, denn an  $\omega$  würden dann aus einem unendlich fernen Punkt wenigstens vier Tangenten gehen. Der Umriss ist also einzügig und hat  $d = 0, e = 4, t = 2, w = 0$ . Die Form des Umrisses ist dadurch vollständig bestimmt; siehe Fig. 7.

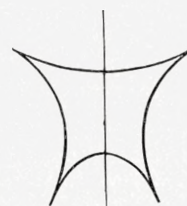


Fig. 7.

Nehmen wir jetzt  $P$  in einem hyperbolischen Punkt der Fläche. Projiziert man auf eine auf  $a$  senkrechte Ebene, wird der Umriss  $\omega$  wieder ganz im Endlichen liegen, weil infolge (1) aus jedem unendlich fernen Punkt ihrer Ebene vier Tangenten an  $\omega$  gehen. Die Kurve hat drei Doppeltangenten, von welchen die eine die Spur der in  $P$  berührenden Ebene ist; sie kann deshalb wie im früheren Fall nicht in zwei

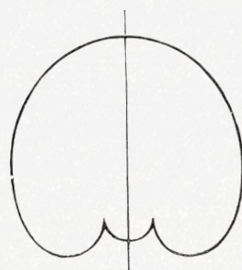


Fig. 8.

Kurven vierter oder zwei dritter Klasse zerfallen. Sie kann aber ersichtlich auch nicht in ein Oval  $\omega'$  und eine Kurve vierter Klasse  $\omega''$  zerfallen. Es kann nämlich die letztere jedenfalls nicht selbst zerfallen, weil dann aus einem unendlich fernen Punkt mehr denn vier Tangenten an  $\omega$  gehen würden. Weil  $\omega'$  und  $\omega''$  einander nicht schneiden, muss die eine innerhalb der anderen liegen, denn sonst würden sie vier Tangenten mit einander gemein haben. Die Symmetrieachse von  $\omega$  müsste also jede der beiden ganz im Endlichen liegenden Kurven  $\omega'$  und  $\omega''$  in zwei Punkten schneiden. Es ist aber ersichtlich,

dass die Symmetrieachse nur zwei Punkte mit  $\omega$  gemein haben kann. Der Umriss ist also auch in diesem Fall einzügig.

Es macht nun einen Unterschied, ob  $P$  auf dem Bogen  $AR$ , oder auf dem Bogen  $RS$  liegt (siehe Fig. 1); es verhält sich selbstverständlich in dieser Beziehung der Bogen  $BR_1$  wie  $AR$ , und der Bogen  $R_1S$  wie  $RS$ . In dem ersteren dieser Fälle schneidet die in  $P$  berührende Ebene dem früheren zufolge (siehe Fig. 2) die Fläche in einer Kurve  $z$ , an die aus  $P$  keine Tangenten gehen; im zweiten Fall gehen aus  $P$  zwei Tangenten an  $z$  (siehe Fig. 3). Hieraus folgt, dass im ersteren Fall die zur Symmetrieachse senkrechte Doppeltangente keine andere Punkte als die Berührungspunkte mit  $\omega$  gemein hat, während im zweiten Fall dieselbe die Kurve  $\omega$  noch in zwei anderen Punkten schneiden wird.

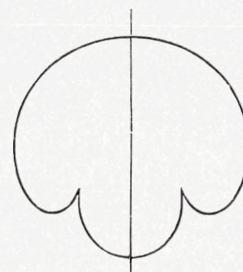


Fig. 9.

Aus alle dem folgt, dass der Umriss aus einem Augenpunkt auf dem Bogens  $AR$  die in Fig. 8 angegebene Form hat, während sie die in Fig. 9 angegebene Form haben wird, wenn  $P$  auf den Bogen  $RS$  liegt.

Wir haben noch besonders die Umrisse zu bestimmen, wenn  $P$  in einem Endpunkt der oben genannten Bögen liegen, also entweder in  $S$  in  $R$  oder in  $A$ .

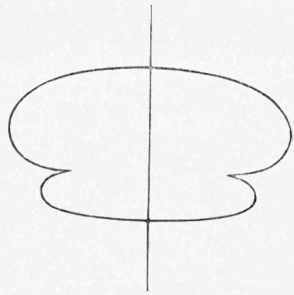


Fig. 10.

Nehmen wir erst  $P$  in dem Punkt  $S$ , wo die Haupttangente hyperoskulieren. Hier hat die Schnittkurve  $z$  der Fläche mit der in  $P$  berührenden Ebene zwei in  $P$  fallende Inflexionspunkte. Die im Allgemeinen von  $P$  ausgehenden Tangenten an  $z$  fallen also mit den in  $P$  berührenden zusammen. Deshalb liegen die zwei Spitzen der Kurve  $\omega$  in der auf der Symmetrieachse senkrechten Doppeltangente, und dieselbe wird zugleich in den Spitzen berühren. Man erhält so die in Fig. 10 angegebene Form des Umrisses.

Liegt  $P$  in  $R$ , dann hat der Umriss offenbar eine dreifache Tangente, siehe Fig. 11.

Nehmen wir endlich  $P$  in einem Punkt  $A$  einer der parabolischen Kreise  $\pi_1$ . Wir haben schon oben im Satz (6) gesehen, dass die Spur  $l$  der Ebene des Kreises in der Bildebene eine Wendetangente des Umrisses ist, und dass deren Berührungspunkt die Spur  $T$  der in  $P$  berührenden Tangente an  $\pi_1$  ist. Es kommt nun wesentlich darauf an zu sehen, dass  $\omega$  einzügig ist. Denken wir uns, dass  $\omega$  ausser den Zweig  $\omega'$ , der durch  $T$  geht, noch einen Zweig  $\omega''$  enthält. Die Klasse von  $\omega'$  muss paar sein, weil sonst  $\omega$  in zwei Zweige dritter Klasse zerfallen würde, was infolge des Hilfsatzes (8) Seite 10 ausgeschlossen ist. Aus einem  $T$  nahe liegenden Punkt  $M$  von  $\omega'$  gehen deshalb zwei Tangenten an  $\omega'$  ausser derjenigen, die in  $M$  berührt. Durch jeden Punkt von  $\omega'$  gehen also auch in derselben Weise zwei Tangenten an  $\omega'$ , weil diese Kurve keine Doppelpunkte und ausser  $l$  keine Wendetangenten hat. Aber infolge des Satzes (1) gehen durch jeden Punkt von  $\omega'$  (in derselben Weise verstanden) nur zwei Tangenten an  $\omega = \omega' + \omega''$ .  $\omega$  kann deshalb ausser  $\omega'$  keinen anderen Zweig enthalten, denn  $\omega'$  müsste, als

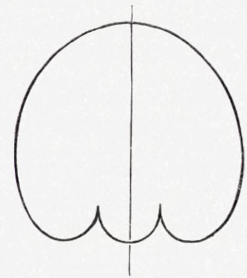


Fig. 11.

Kurve unpaarer Ordnung ( $\omega = 1$ ), von jeder Tangente an  $\omega''$  geschnitten werden.

Der Umriss ist also einzügig, hat zwei Spitzen, zwei Doppeltangenten, eine Wendetangente und keine Doppelpunkte.



Fig. 12.

Die Form der Kurve, indem eine auf die Ebene ( $Aa$ ) senkrechte und zu  $a$  parallele Ebene als Bildebene gewählt wird, findet sich Fig. 12.

Wir wollen nun zu den Umrisen aus nicht in der Fläche liegenden Augenpunkten  $P$  übergehen. Die Zahl der Wendepunkte ist immer null, und die Zahl der Doppeltangenten ist in den verschiedenen Fällen leicht ersichtlich. Eine Änderung in der Zahl der Spitzen kann jedenfalls nur dann stattfinden, wenn der veränderlich gedachte Punkt  $P$  eine hyperoskulierende Haupttangente oder die Fläche in



einem hyperbolischen Punkt oder möglicherweise auch die Ebene eines parabolischen Kreises überschreitet.

Wir wollen erst  $P$  im Inneren der Fläche liegend annehmen. Weil durch einen elliptischen Punkt  $M$  der Fläche vier Haupttangente gehen, deren Berührungspunkte alle in endlicher Entfernung von  $M$  liegen, bleiben vier durch  $P$  gehende Haupttangente erhalten, wenn  $P$  von  $M$  aus in das Innere der Fläche dringt.

Der Umriss  $\omega$  muss auch einzügig bleiben. Sie kann nämlich nicht in zwei Kurven vierter, zwei dritter oder zwei zweiter Klasse zerfallen, was man ganz wie früher sieht. Der oben Seite 13 geführte Beweis dafür, dass  $\omega$  auch nicht in eine Kurve vierter Klasse  $\omega'$  und eine zweiter Klasse  $\omega''$  zerfallen kann, setzte aber voraus, dass  $\omega$  ganz im Endlichen liegt. Davon kann man hier nicht ausgehen

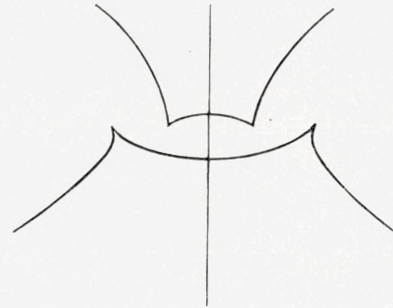


Fig. 13.

(siehe das folgende), aber man kann ersichtlich machen, dass wenn man das genannte Zerlegen annehmen würde, dann müsste  $\omega$  ganz im Endlichen liegen, und dann würde wieder der obige Beweis für die Unmöglichkeit des Zerfallens sein Recht behalten. Nehmen wir also an,  $\omega$  zerfalle in eine Kurve  $\omega''$  vierter und eine  $\omega'$  zweiter Klasse. Aus einem einer Spitze naheliegenden Punkt  $M$  von  $\omega''$  gehen nun wenigstens zwei Tangente an  $\omega''$ , aber infolge Satz (1) gehen aus  $M$  nur zwei ausserhalb  $M$  berührende Tangente an  $\omega = \omega' + \omega''$ . Es muss deshalb  $\omega''$  ganz im Inneren von  $\omega'$  liegen. Eine ausserhalb  $\omega'$  liegende Gerade  $l$  hat deshalb keinen Punkt mit  $\omega$  gemein, und diese liegt ganz im Endlichen, wenn  $l$  ins Unendliche projiziert wird. Eine Kurve vierter Klasse mit vier Spitzen, zwei Doppeltangenten und ohne Doppelpunkte muss nun entweder die in Fig. 7 oder die in Fig. 13 dargestellte Form haben. Diese geben auch die zwei möglichen Formen des Umrisses, denn wir können leicht dafür sorgen, dass diese eine Symmetrieachse und höchstens zwei unendlich ferne Punkte haben. Es ist aber die Frage, ob diese als mögliche erkannte Formen auch wirklich beide als Umrisse auftreten. Dies ist eben der Fall. Der projektive Unterschied zwischen der Kurve in Fig. 7 und in Fig. 13 ist nämlich der, dass im ersteren eine auf die Symmetrieachse senkrechte Verbindungsgerade zweier Spitzen ausser diesen noch zwei Punkte mit der Kurve gemein hat, während dies mit der Kurve in Fig. 7 nicht statt findet. Betrachten wir nun die früher in Fig. 8 und in Fig. 9 angegebenen Umrissen aus einem hyperbolischen Punkt  $P_1$  der Fläche, sehen wir, dass man hier zwei Spitzen finden kann, deren Verbindungsgerade den genannten Bedingungen genügt. Weil die Berührungspunkte der durch diese Spitzen gehende Haupttangente in endlicher Entfernung von  $P_1$  liegen, werden die genannten Bedingungen noch gültig bleiben für einen Augenpunkt  $P$ , der im Inneren der Fläche liegend noch  $P_1$  hinreichend

benachbart ist. Die Übergangskurve in der Ebene des Ovals  $\alpha$  zwischen Augenpunkte, welche Umrissen der Form in Fig. 7 und der Form in Fig. 13 geben, ist also eine Kurve, die innerhalb  $\alpha$  von  $A$  über  $S$  nach  $B$  geht, und ist der Ort der Punkte, aus denen vier in einer Ebene liegende Haupttangente gehen; sie ist schwerlich im Allgemeinen genauer zu charakterisieren.<sup>1)</sup>

Indem wir nun zu den Umrissen  $\omega$  aus jenen Augenpunkte  $O$  übergehen, welche ausserhalb der Fläche liegen, werden wir uns erst klar machen, wann Doppelpunkte in  $\omega$  auftreten und wann nicht. Der Aussenraum der Fläche wird durch den doppel umschriebenen Kegel und durch das hyperoskulierende Hyperboloid in getrennte Gebiete zerlegt, welche wir mit  $(\alpha)$   $(\beta)$   $(\gamma)$   $(\delta)$   $(\varepsilon)$  bezeichnen wollen. Es wird nicht zu Missverständnissen leiten können, wenn wir durch dieselben Bezeichnungen zugleich die in der Ebene des Ovals  $\alpha$  liegenden ebenen Gebiete der genannten räumlichen verstehen wollen. Diese ebene Gebiete werden durch Bögen der  $\alpha$  hyperoskulierenden Hyperbel  $\pi$  und durch Strecken der Doppeltangente  $t$  und  $t'$ , sowie durch Bögen von  $\alpha$  begrenzt. Freilich haben wir keine Rücksicht auf eine durch die Ebenen der parabolischen Kreise bewirkte Zerlegung genommen; das folgende zeigt indessen, dass dies im projektiven Sinne auch nicht nöthig ist. Es kommt nun darauf an zu sehen, in welche ebene Gebiete eine das Oval  $\alpha$  doppelberührende Hyperbel  $\pi'$  eindringen wird.

Die Berührungspunkte  $P$  und  $Q$  einer solchen Hyperbel mit  $\alpha$  liegen nach dem früheren (siehe Seite 7) beide auf dem Bogen  $RSR_1$  (Fig. 1), und sie gehen bzw. von  $R$  und  $R_1$  aus so, dass sie in  $S$  zusammenfallen. Betrachten wir nun allein die Verhältnisse in einer der durch  $\alpha$  begrenzten Halbebene, können zwei Hyperbel, für welche  $\alpha$  die transverse Achse ist, höchstens zwei Punkte mit einander gemein haben. Eine beliebige doppelberührende Hyperbel  $\pi'$  muss nun die Hyperbel  $\pi$  in zwei Punkten schneiden, welche beide auf dem Bogen  $USU_1$  liegen, wo  $U$  und  $U_1$  die Schnittpunkte von  $t$  und  $t'$  mit  $\pi$  sind. Ebenso müssen von den zwei Schnittpunkten von  $\pi'$  mit  $t$  und  $t'$  der eine auf der endlichen Strecke  $UR$ , der andere auf der endlichen Strecke  $U_1R_1$  liegen. Es ist dies eine Folge davon, dass die oben genannten Gebiete völlig begrenzt sind, und dass eine Kurve  $\pi'$  niemals in das Innere des Ovals  $\alpha$  eindringen kann. Deshalb kann  $\pi'$  weder  $\pi$  noch  $(tt_1)$  ausserhalb der genannten Bögen oder Strecken schneiden, und kann deshalb nicht in die Gebiete  $(\alpha)$  und  $(\delta)$  eindringen. Die sich stetig ändernde Kurve  $\pi'$ , deren Grenzstellungen  $(tt')$  und  $\pi$  sind, wird aber die Gebiete  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  und  $(\varepsilon)$  ganz überstreichen.

Ferner bemerken wir, dass eine Änderung der Zahl  $e$  der Spitzen jedenfalls nur dann eintreten kann, wenn durch den Augenpunkt  $O$  zusammenfallende Haupttangente gehen. Es geschieht dies, wenn man nur Punkte ausserhalb der Fläche in Betracht zieht, jedenfalls nur wenn  $O$  entweder das hyperoskulierende Hyper-

<sup>1)</sup> Auch für den gewöhnlichen Kugelring ist es mir nicht gelungen die Gleichung der obengenannten Kurve in irgend überschaubarer Form zu bringen; in Fig. 1 ist die Übergangskurve punktiert skizzenmässig angegeben.

boloid oder die Ebene eines parabolischen Kreises ausserhalb des Kreises überschreitet; was hier in der genannten Beziehung durch den Übergang bewirkt wird, kann man nicht im Voraus wissen. Es kann aber keine Änderung in  $e$  geschehen, wenn  $O$  den doppel umschriebenen Kegel in einem „allgemeinen“ Punkt überschreitet.

Endlich wollen wir noch bemerken:

Jeder Umriss der Fläche aus einem ausserhalb der Fläche (10) liegenden Punkt  $O$  kann ins Endliche projiziert werden.

Eine durch  $O$  gehende auf die Achse  $a$  senkrechte Ebene schneidet entweder nicht die Fläche oder schneidet sie in zwei Kreisen (die auch zusammenfallen können). Im ersteren Fall wähle man als Bildebene eine auf  $a$  senkrechte Ebene, und ebenso auch dann, wenn  $O$  innerhalb beider genannten Kreise liegt (siehe Seite 9). Wenn aber  $O$  ausserhalb beider Kreise liegt, kann man immer eine durch  $O$  gehende die Fläche nicht schneidende Ebene finden, und wähle dann die Bildebene parallel derselben. In beiden Fällen gehen nämlich infolge Satz (1) vier Tangenten an  $\omega$  aus einem unendlich fernen Punkt ihrer Ebene. Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass  $\omega$  ganz im Endlichen liegt.

Man erinnere noch, dass die Bildebene immer so gewählt werden kann, dass das Bild von  $a$  eine Symmetriachse wird.

Wir nehmen nun  $O$  in einem Punkt des Gebietes ( $\delta$ ). Bewegt sich  $O$  von einem elliptischen Punkt der Fläche aus in ( $\delta$ ) hinein, sieht man sogleich, dass die vier Spitzen des Umrisses bleiben, und dass eine neue Kurve in  $\omega$  auftreten muss, die man unschwer als Oval erkennt. Verfährt man aber so, wird man im Unsichern, ob diese Verhältnisse auch bleiben, wenn  $O$  in ( $\delta$ ) die Ebene eines parabolischen Kreises überschreitet. Wir werden deshalb den Umriss  $\omega$  aus einem beliebigen Punkt  $O$  von ( $\delta$ ) ganz direct bestimmen. Es hat  $\omega$  erstens zwei Doppeltangenten und keine Doppelpunkte oder Inflexionspunkte. Wenn also  $\omega$  einzügig wäre, dann hätte sie auch vier Spitzen wie aus der allgemeinen Theorie der Kurven vierter Klasse hervorgeht.

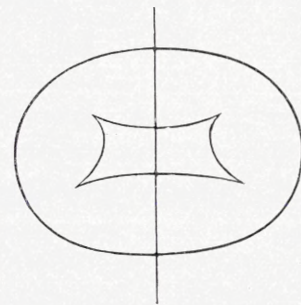


Fig. 14.

Man hat nämlich den folgenden Satz:<sup>1)</sup>

„Hat eine einzügige Kurve vierter Klasse  $d$  Doppelpunkte,  $t$  Doppeltangenten und  $e$  Spitzen, dann ist, wenn  $d = 0$ , entweder  $t = 2$ ,  $e = 4$ , oder  $t = 3$ ,  $e = 2$ , wenn aber  $d > 0$ , dann hat man immer

$$e = 2(d - t).“$$

<sup>1)</sup> Siehe: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, Mat. Nat. Afd. XI, 2. 1914. § 13 S. 51.

Wir hätten auch diesen Satz mit Nutzen früher anwenden können, haben es aber vorgezogen, die Umrisse aus einem Punkt der Fläche independent und mit den geringsten Voraussetzungen zu charakterisieren.

Dann müsste aber  $\omega$  die in Fig. 7 angegebene Form haben, und aus einem unendlich fernen Punkt würden nur zwei Tangenten an  $\omega$  gehen. Der Umriss muss also zerfallen. Er kann aber nach einer schon mehrmals benutzten Schlussweise nicht in zwei Kurven vierter oder zwei dritter Klasse zerfallen. Auch nicht in zwei Ovale, weil zwei solche Kurven, die zwei Tangenten mit einander gemein haben, einander in zwei Punkten schneiden. Es zerfällt also  $\omega$  in eine Kurve  $\omega''$  vierter und eine  $\omega'$  zweiter Klasse. Aus jedem Punkt  $M$  von  $\omega$  gehen infolge Satz (1) zwei ausserhalb  $M$  berührende Tangenten, aber aus jedem Punkt  $N$  von  $\omega''$ , die keine Doppelpunkte hat, gehen auch zwei Tangenten an  $\omega''$ , die ausserhalb  $N$  berühren. Daraus folgt, dass  $\omega''$  ganz im Inneren von  $\omega'$  liegt, und daraus weiter, dass die zwei Doppeltangenten von  $\omega$ , beide  $\omega''$  angehören müssen. Diese Kurve hat also vier Spitzen und wird wieder die Form von Fig. 7 haben. Die Form des jetzigen Umrisses ist also vollständig charakterisiert (siehe Fig. 14). Diese Bestimmung ist vollständig unabhängig davon, ob  $O$  auf der einen oder auf der anderen Seite der Ebene eines parabolischen Kreises liegt.

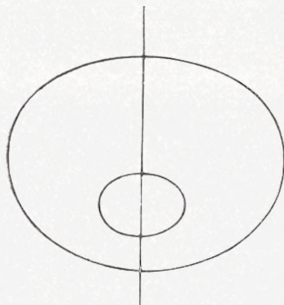


Fig. 15.

Denken wir uns jetzt den Augenpunkt  $O$  im Gebiete ( $\alpha$ ). Liegt  $O$  in der Achse  $a$ , dann ist der Umriss zwei Kreise. Bei allgemeiner Lage in ( $\alpha$ ) hat  $a$  jedenfalls keine Doppelpunkte, Doppeltangenten oder Wendetangenten. Wäre sie einzügig, müsste sie deshalb zweiter Klasse sein, was unmöglich ist, weil aus dem unendlich fernen Punkt ihrer Ebene vier Tangenten gehen. Die Kurve muss also aus zwei Ovalen zusammengesetzt sein, von welchen offenbar das eine ganz im Inneren des anderen liegen muss (Fig. 15).

Wir haben noch die Fälle, dass  $O$  in ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) oder ( $\varepsilon$ ) liegen kann, zu behandeln. In diese Gebiete kann man aus einem der schon untersuchten Gebiete ( $\alpha$ ) oder ( $\delta$ ) eindringen, ohne dabei andere singularitätsändernde Fläche als die doppel umschriebene Kegelfläche ( $t$ ) zu überschreiten. Beim Überschreiten dieser Fläche bleibt die Zahl der Spitzen unverändert, und die Änderungen, welche Doppelpunkte und Doppeltangente betreffen, sind bekannt. In der Übergangsform berühren sich zwei Bögen des Umrisses, und sie gehen hier vom Sich-schneiden zu Sich-nicht-schneiden (oder umgekehrt) über; es folgt dies aus der früheren Betrachtung der auftretenden Doppelpunkte.

Obgleich eine independente Bestimmung des Umrisses für alle Lagen des Augenpunktes  $O$  ohne wesentliche Schwierigkeiten durchführbar ist, wird dies doch in den noch restierenden Fällen ziemlich weitläufig, und wir werden uns daher damit begnügen die noch nicht untersuchten Umrisse aus den schon gefundenen abzuleiten.

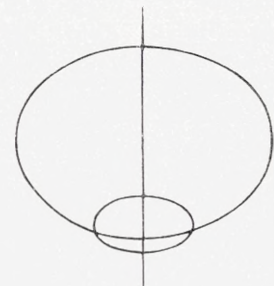


Fig. 16.

Denken wir uns erst, dass  $O$  von  $(a)$  aus in  $(\beta)$  dringt, hier wie immer durch einen allgemeinen Punkt von  $(t)$ . Bei diesem Übergang wird  $e = 0$  unverändert, aber es treten dem obigen zufolge zwei Doppelpunkte und zwei Doppeltangenten auf. Weil keine Wendetangenten auftreten, wird in dem betrachteten Fall der Umriss aus zwei sich in zwei Punkten schneidenden Ovalen zusammengesetzt sein. (Fig. 16).

Geht  $O$  von  $(\delta)$  in  $(\gamma)$  über, dann treten durch Schneiden zweier Bögen des Umrisses Doppelpunkte auf, und zwar so, dass zwei Doppeltangenten verschwinden.

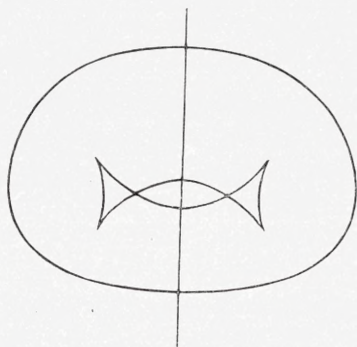


Fig. 17.

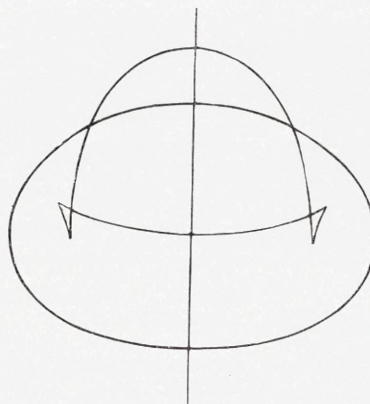


Fig. 18.

Dies giebt unzweifelhaft die in Fig. 17 dargestellte Form des Umrisses aus einem Punkt in  $(\gamma)$ .

Geht endlich  $O$  von  $(\gamma)$  in  $(\varepsilon)$  über, dann sollen durch Überschreiten einer Lage, wo sich zwei Bögen des Umrisses berühren, zwei neue Doppeltangenten auftreten. Dies muss die in Fig. 18 angegebene Form des Umrisses aus einem Punkt in  $(\varepsilon)$  geben.

Bei diesen Betrachtungen ist von den mehr komplizierten Änderungen, welche beim Überschreiten des hyperoskulierenden Hyperboloids auftreten, keine Rede gewesen; es war dies für uns unnötig. Jetzt sieht man aber nachträglich, dass beim Überschreiten einer hyperoskulierenden Haupttangente zwei neue Spitzen und ein neuer Doppelpunkt auftreten werden, die sich in einem „Cuspidalpaar“ vertheilen.



	Kr.	øre
<b>VI, med 4 Tavler. 1890—92</b> . . . . .	13.	75.
1. Lorenz, L. Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle. 1890 . . . . .	2.	"
2. Sørensen, William. Om Forbeninger i Svømmeblæren, Pleura og Aortas Væg og Sammensmeltningen deraf med Hvirvelsøjlen særlig hos Siluroiderne, samt de saakaldte Weberske Knoglers Morfologi. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1890 . . . . .	3.	80.
3. Warming, Eug. Lagoa Santa. Et Bidrag til den biologiske Plantegeografi. Med en Fortegnelse over Lagoa Santas Hvirveldyr. Med 43 Illustrationer i Texten og 1 Tavle. Résumé en français. 1892 . . . . .	10.	85.
<b>VII, med 4 Tavler. 1890—94</b> . . . . .	13.	75.
1. Gram, J. P. Studier over nogle numeriske Funktioner. Résumé en français. 1890 . . . . .	1.	10.
2. Prytz, K. Metoder til korte Tidens, særlig Rotationstidens, Udmaaling. En experimental Undersøgelse. Med 16 Figurer i Texten. 1890 . . . . .	1.	50.
3. Petersen, Emil. Om nogle Grundstoffers allotrope Tilstandsformer. 1891 . . . . .	1.	60.
4. Warming, Eug. Familien Podostemaceae. 4 <sup>de</sup> Afhandling. Med c. 185 mest af Forfatteren tegnede Figurer i 34 Grupper. Résumé et explication des figures en français. 1891 . . . . .	1.	50.
5. Christensen, Odu T. Rhodanchromammoniakforbindelser. (Bidrag til Chromammoniakforbindelsernes Kemi. III.) 1891 . . . . .	1.	25.
6. Lütken, Chr. Spolia Atlantica. Scopelini Musei Zoologici Universitatis Hauniensis. Bidrag til Kundskab om det aabne Havs Laxesild eller Scopeliner. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1892 . . . . .	3.	50.
7. Petersen, Emil. Om den elektrolytiske Dissociationsvarme af nogle Syrer. 1892 . . . . .	1.	25.
8. Petersen, O. G. Bidrag til Scitamineernes Anatomi. Résumé en français. 1893 . . . . .	2.	75.
9. Lütken, Chr. Andet Tillæg til "Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten <i>Cyanus</i> Latr. eller Hval-lusene". Med 1 Tavle. Résumé en français. 1893 . . . . .	"	85.
10. Petersen, Emil. Reaktionshastigheden ved Methylætherdannelsen. 1894 . . . . .	1.	50.
<b>VIII, med 3 Tavler. 1895—98</b> . . . . .	12.	25.
1. Melnert, F. Sideorganerne hos Scarabæ-Larverne. Les organes latéraux des larves des Scarabés. Med 3 Tavler. Résumé et explication des planches en français. 1895 . . . . .	3.	30.
2. Petersen, Emil. Damptryksformindskelsen af Methylalkohol. 1896 . . . . .	1.	"
3. Buchwaldt, F. En matematisk Undersøgelse af, hvorvidt Vædsker og deres Dampe kunne have en fælles Tilstandsligning, baseret paa en kortfattet Fremstilling af Varmetheoriens Hovedsætninger. Résumé en français. 1896 . . . . .	2.	25.
4. Warming, Eug. Halofyt-Studier. 1897 . . . . .	3.	"
5. Johannsen, W. Studier over Planternes periodiske Livsyttringer. I. Om antagonistiske Virksomheder i Stofskiftet, særlig under Modning og Hvile. 1897 . . . . .	3.	75.
6. Nielsen, N. Undersøgelser over reciproke Potenssummer og deres Anvendelse paa Rækker og Integraler. 1898 . . . . .	1.	60.
<b>IX, med 17 Tavler. 1898—1901</b> . . . . .	17.	"
1. Steenstrup, Japetus, og Lütken, Chr. Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Klump- eller Maanefiskene ( <i>Molidæ</i> ). Med 4 Tavler og en Del Xylografer og Fotogravurer. 1898 . . . . .	4.	75.
2. Warming, Eug. Familien Podostemaceae. 5 <sup>te</sup> Afhandling. Med 42 Figurgrupper. Résumé en français. 1899 . . . . .	1.	60.
3. Meyer, Kirstine. Om overensstemmende Tilstande hos Stofferne. En med Videnskabernes Selskabs Guldmedaille belønnet Prisaafhandling. Med en Tavle. 1899 . . . . .	2.	60.
4. Jørgensen, S. M. Om Zeise's Platosemiæthylen- og Cossa's Platosemiamminsalte. Med 1 Tavle. 1900 . . . . .	"	75.
5. Christensen, A. Om Overbromider af Chinaalkaloider. 1900 . . . . .	1.	"
6. Steenstrup, Japetus. Heteroteuthis <i>Gray</i> , med Bemærkninger om Rossia- <i>Sepiola</i> -Familien i Almindelighed. Med en Tavle. 1900 . . . . .	"	90.
7. Gram, Bille. Om Proteinkornene hos oliegivende Frø. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901 . . . . .	2.	50.
8. Melnert, Fr. Vandkalvelarverne ( <i>Larvæ Dytiscidarum</i> ). Med 6 Tavler. Résumé en français. 1901 . . . . .	5.	35.
<b>X, med 4 Tavler. 1899—1902</b> . . . . .	10.	50.
1. Juel, C. Indledning i Læren om de grafske Kurver. Résumé en français. 1899 . . . . .	2.	80.
2. Billmann, Einar. Bidrag til de organiske Kvægsølvforbindelsers Kemi. 1901 . . . . .	1.	80.
3. Samsoe Lund og Rostrup, E. Marktidsele ( <i>Cirsium arvense</i> ). En Monografi. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901 . . . . .	6.	"
4. Christensen, A. Om Bromderivater af Chinaalkaloiderne og om de gennem disse dannede brintfattigere Forbindelser. 1902 . . . . .	1.	40.
<b>XI, med 10 Tavler og 1 Kort. 1901—03</b> . . . . .	15.	05.
1. Warming, Eug. Familien Podostemaceae. 6 <sup>te</sup> Afhandling. Med 47 Figurgrupper. Résumé en français. 1901 . . . . .	2.	15.
2. Ravn, J. P. J. Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. I. Lamellibranchiater. Med 1 Kort og 4 Tavler. 1902 . . . . .	4.	"
3. Winther, Chr. Rotationsdispersionen hos de spontant aktive Stoffer. 1902 . . . . .	2.	"
4. Ravn, J. P. J. Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. II. Scaphopoder, Gastropoder og Cephalopoder. Med 5 Tavler. 1902 . . . . .	3.	40.
5. Winther, Chr. Polarimetriske Undersøgelser II: Rotationsdispersionen i Opløsninger . . . . .	1.	60.
6. Ravn, J. P. J. Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. III. Stratigrafiske Undersøgelser. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1903 . . . . .	3.	85.
<b>XII, med 3 Tavler og 1 Kort. 1902—04</b> . . . . .	10.	50.
1. Forch, Carl, Knudsen, Martin, und Sørensen, S. P. L. Berichte über die Konstantenbestimmungen zur Aufstellung der hydrographischen Tabellen. Gesammelt von <i>Martin Knudsen</i> . 1902 . . . . .	4.	75.
2. Bergh, R. Gasteropoda opisthobranchiata. With three plates and a map. (The Danish expedition to Siam 1899—1900, I.) 1902 . . . . .	3.	45.
3. Petersen, C. G. Joh., Jensen, Søren, Johansen, A. C., og Levinsen, J. Chr. L. De danske Farvandes Plankton i Aarene 1898—1901. 1903 . . . . .	3.	25.
4. Christensen, A. Om Chinaalkaloidernes Dibromadditionsprodukter og om Forbindelser af Alkaloidernes Chlorhydrater med højere Metalchlorider. 1904 . . . . .	1.	35.

# Mathematiske og astronomiske Skrifter

udgivne af det Kgl. danske Videnskabernes Selskab

(udenfor Skrifternes 6. Række, se Omslagets S. 2—3):

	Kr. Øre
Braae, Joh. Meridianbeobachtungen von 304 B- und M-Sternen. 1914 .....	65
Hansen, C. Recherches sur les singularités de certaines séries spéciales sur leur cercle de convergence. 1908	1. 20
Hansen, P. C. V. En Sætning om den Eulerske Faktor svarende til Differentialligningen $M + N \frac{dy}{dx} = 0$ . 73...	65
Hansteen, C. Den magnetiske Inclinations Forandring i den nordlige tempererte Zone. I, med et Kort. 55...	2. "
— — — II. 57 .....	1. 15
Hertzprung, S. Reduktion af Maskelynes Iagttagelser af smaa Stjerner. 65.....	1. 15
Hjelmslev, J. Om Regning med lineære Transformationer. 1911 .....	90
— Grundlag for Fladernes Geometri. 1914 .....	1. 65
Juel, C. Om ikke-analytiske Kurver. 1906 .....	1. 95
— Om simple cykliske Kurver. 1911 .....	65
— Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung. 1914 .....	1. 75
Nielsen, N. Recherches sur une classe de fonctions méromorphes 1904 .....	1. 45
— Recherches sur les fonctions sphériques. 1906 .....	1. 75
— Recherches sur quelques généralisations d'une identité intégrale d'Abel. 1907 .....	1. 20
— Recherches sur les nombres de Bernoulli. 1913 .....	2. 40
— Recherches sur les fonctions de Bernoulli. 1915 .....	1. 65
Nørlund, N. E. Ueber lineare Differenzgleichungen. 1911 .....	65
— Untersuchungen über die Eigenbewegungen für 140 Sternen des IV. Secchischen Typus mittels älterer und eigener Beobachtungen. 1912 .....	1. 40
Ramus, C. Undersøgelse af Resten i Lagranges Række, samt: Om en Egenskab ved de lineære Differential-Ligninger med 2 Variable. 42 .....	65
— Om nogle Curvers Rectification ved elliptiske Functioner. 45 .....	50
— Om Ellipsoiders Tiltrækning og om de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af flydende Masser. 45.....	1. 65
Schjellerup, H. C. F. C. Tycho Brahes Original-Observationer benyttede til Banebestemmelse af Cometen 1580. 54.	1. "
Steen, A. Hovedsætninger om de overelliptiske Funktioner og: Om dobbelte bestemte Integraler. 49 .....	65
— Om Integrationen af Differentialligninger. Résumé en français. 68.....	35
— Om Ændringen af Integraler af irrationale Differentialer. 69.....	40
— Læren om homogene tunge Vædskers Tryk paa plane Arealer, m. 1 Tavle. Résumé en français. 72. ...	75
— Om Muligheden af et Par lineære Differentialligningers Integration ved endelige explicite Funktioner. 75...	75
Strömgren, E. Ueber den Ursprung der Kometen. 1914.....	2. "
Thiele, T. N. Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en «systematisk» Karakter. 80.....	85
Zeuthen, H. G. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, m. 5 Tavler. Résumé en français. 73..	3. 60
—————	
d'Arrest H. L. Siderum nebulosorum observationes Havnienses. 67 .....	12. "
Hansen & Olufsen. Tables du soleil. 53 .....	4. "
— — Supplément aux tables du soleil. 57 .....	35
Jürgensen, Chr. Sur le mouvement du pendule. 53.....	65
Schjellerup, H. C. F. C. Stjernefortegnelse, indeholdende 10,000 Positioner og teleskopiske Fixstjerner imellem — 15 og + 15 Graders Deklination. Med 1 Tavle. 64.....	7. "